# 有限群上的傅里叶分析与瑞利商

## 一种基于对称性的证明

林国斌

三明学院应用数学系

*linguobin0812@163.com*

2025 年 11 月 14 日

# 目录

# 摘要

## 研究背景

瑞利商在数值线性代数、物理学中的振动分析以及机器学习中的谱聚类等领域有着广泛应用

# 摘要

### 研究背景

瑞利商在数值线性代数、物理学中的振动分析以及机器学习中的谱聚类等领域有着广泛应用，其核心价值在于通过变分原理为分析和计算厄米特矩阵的特征值问题提供框架。

# 摘要

## 研究背景

瑞利商在数值线性代数、物理学中的振动分析以及机器学习中的谱聚类等领域有着广泛应用，其核心价值在于通过变分原理为分析和计算厄米特矩阵的特征值问题提供框架。

## 研究内容

递归计算表明，经典瑞利商的最大值是一类特殊三对角矩阵（主对角线元素为零且所有非零元素均为二分之一）的最大特征值

# 摘要

## 研究背景

瑞利商在数值线性代数、物理学中的振动分析以及机器学习中的谱聚类等领域有着广泛应用，其核心价值在于通过变分原理为分析和计算厄米特矩阵的特征值问题提供框架。

## 研究内容

递归计算表明，经典瑞利商的最大值是一类特殊三对角矩阵（主对角线元素为零且所有非零元素均为二分之一）的最大特征值。然而，本文基于有限群上的傅里叶分析给出了另一种证明。

# 瑞利商的基本定义

对于实向量$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，经典瑞利商定义为：

# 瑞利商的基本定义

对于实向量$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，经典瑞利商定义为：

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T M\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1}$$

# 瑞利商的基本定义

对于实向量$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，经典瑞利商定义为：

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T M \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1}$$

其中$M$为特殊三对角矩阵：

# 瑞利商的基本定义

对于实向量$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，经典瑞利商定义为：

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T M \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1}$$

其中$M$为特殊三对角矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1/2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

# 传统递归证明方法

## 特征方程方法

通过构造特征多项式:

# 传统递归证明方法

## 特征方程方法

通过构造特征多项式：

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

# 传统递归证明方法

## 特征方程方法

通过构造特征多项式：

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

利用三对角矩阵的特殊结构，建立递推关系。

# 传统递归证明方法

## 特征方程方法

通过构造特征多项式：

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

利用三对角矩阵的特殊结构，建立递推关系。

## 递归计算

设$D_n(\lambda) = \det(M_n - \lambda I)$，则有：

# 传统递归证明方法

## 特征方程方法

通过构造特征多项式：

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

利用三对角矩阵的特殊结构，建立递推关系。

## 递归计算

设$D_n(\lambda) = \det(M_n - \lambda I)$，则有：

$$D_n(\lambda) = -\lambda D_{n-1}(\lambda) - \frac{1}{4} D_{n-2}(\lambda)$$

# 传统递归证明方法

## 特征方程方法

通过构造特征多项式：

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

利用三对角矩阵的特殊结构，建立递推关系。

## 递归计算

设$D_n(\lambda) = \det(M_n - \lambda I)$，则有：

$$D_n(\lambda) = -\lambda D_{n-1}(\lambda) - \frac{1}{4} D_{n-2}(\lambda)$$

通过求解该递推方程得到特征值。

# 传统方法的局限性

## 计算复杂性

- 递推过程繁琐，缺乏直观性

# 传统方法的局限性

## 计算复杂性

- 递推过程繁琐，缺乏直观性
- 难以推广到更复杂系统

# 传统方法的局限性

## 计算复杂性

- 递推过程繁琐，缺乏直观性
- 难以推广到更复杂系统
- 掩盖了问题的内在对称性

# 传统方法的局限性

## 计算复杂性

- 递推过程繁琐，缺乏直观性
- 难以推广到更复杂系统
- 掩盖了问题的内在对称性

# 传统方法的局限性

## 计算复杂性

- 递推过程繁琐，缺乏直观性
- 难以推广到更复杂系统
- 掩盖了问题的内在对称性

## 概念深度不足

- 无法揭示群论结构

# 传统方法的局限性

**计算复杂性**

- 递推过程繁琐，缺乏直观性
- 难以推广到更复杂系统
- 掩盖了问题的内在对称性

**概念深度不足**

- 无法揭示群论结构
- 难以联系连续与离散理论

# 传统方法的局限性

## 计算复杂性

- 递推过程繁琐，缺乏直观性
- 难以推广到更复杂系统
- 掩盖了问题的内在对称性

## 概念深度不足

- 无法揭示群论结构
- 难以联系连续与离散理论
- 缺乏统一的理论框架

# 传统方法的局限性

## 计算复杂性

- 递推过程繁琐，缺乏直观性
- 难以推广到更复杂系统
- 掩盖了问题的内在对称性

## 概念深度不足

- 无法揭示群论结构
- 难以联系连续与离散理论
- 缺乏统一的理论框架

# 传统方法的局限性

## 计算复杂性

- 递推过程繁琐，缺乏直观性
- 难以推广到更复杂系统
- 掩盖了问题的内在对称性

## 概念深度不足

- 无法揭示群论结构
- 难以联系连续与离散理论
- 缺乏统一的理论框架

**核心问题：** 我们需要一个更加本质、更加优美的证明方法!

## 循环群定义

考虑循环群$G = \mathbb{Z}_{2N}$，其中$N = n + 1$：

## 循环群定义

考虑循环群$G = \mathbb{Z}_{2N}$，其中$N = n + 1$：

$$G = \{0, 1, 2, \ldots, 2N - 1\}$$

# 有限循环群基础

## 循环群定义

考虑循环群$G = \mathbb{Z}_{2N}$，其中$N = n + 1$：

$$G = \{0, 1, 2, \ldots, 2N - 1\}$$

群运算为模$2N$加法。

# 有限循环群基础

## 循环群定义

考虑循环群$G = \mathbb{Z}_{2N}$，其中$N = n + 1$：

$$G = \{0, 1, 2, \ldots, 2N - 1\}$$

群运算为模$2N$加法。

## 特征标理论

循环群$\mathbb{Z}_{2N}$的不可约特征标为：

# 有限循环群基础

## 循环群定义

考虑循环群$G = \mathbb{Z}_{2N}$，其中$N = n + 1$：

$$G = \{0, 1, 2, \ldots, 2N - 1\}$$

群运算为模$2N$加法。

## 特征标理论

循环群$\mathbb{Z}_{2N}$的不可约特征标为：

$$\chi_k(g) = e^{2\pi ikg/2N}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2N - 1$$

# 有限循环群基础

## 循环群定义

考虑循环群$G = \mathbb{Z}_{2N}$，其中$N = n + 1$：

$$G = \{0, 1, 2, \ldots, 2N - 1\}$$

群运算为模$2N$加法。

## 特征标理论

循环群$\mathbb{Z}_{2N}$的不可约特征标为：

$$\chi_k(g) = e^{2\pi i k g/2N}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2N - 1$$

构成一组完备正交基。

**定理 (有限群傅里叶变换)**

对于任意函数 $f : G \to \mathbb{C}$，其傅里叶变换为：

# 有限群傅里叶分析

## 定理 (有限群傅里叶变换)

对于任意函数 $f : G \to \mathbb{C}$，其傅里叶变换为：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g)$$

# 有限群傅里叶分析

## 定理 (有限群傅里叶变换)

对于任意函数$f : G \to \mathbb{C}$，其傅里叶变换为：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g)$$

逆变换为：

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_k \hat{f}(k)\overline{\chi_k(g)}$$

# 有限群傅里叶分析

## 定理 (有限群傅里叶变换)

对于任意函数$f : G \to \mathbb{C}$，其傅里叶变换为：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g)$$

逆变换为：

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{k} \hat{f}(k)\overline{\chi_k(g)}$$

## 卷积定理

卷积在傅里叶域中变为乘法：

### 定理 (有限群傅里叶变换)

对于任意函数$f : G \to \mathbb{C}$，其傅里叶变换为：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g)$$

逆变换为：

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_k \hat{f}(k)\overline{\chi_k(g)}$$

### 卷积定理

卷积在傅里叶域中变为乘法：

$$\widehat{f * h}(k) = \hat{f}(k) \cdot \hat{h}(k)$$

# 有限群傅里叶分析

## 定理 (有限群傅里叶变换)

对于任意函数$f : G \to \mathbb{C}$，其傅里叶变换为：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g)$$

逆变换为：

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{k} \hat{f}(k)\overline{\chi_k(g)}$$

## 卷积定理

卷积在傅里叶域中变为乘法：

$$\widehat{f * h}(k) = \hat{f}(k) \cdot \hat{h}(k)$$

其中$(f * h)(g) = \sum_{k \in G} f(g - k)h(k)$。

# 卷积核的构造

## 相互作用核

定义卷积核$f : G \to \mathbb{C}$为:

# 卷积核的构造

## 相互作用核

定义卷积核$f: G \to \mathbb{C}$为：

$$f(g) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & g \equiv \pm 1 \pmod{2N}, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

# 卷积核的构造

## 相互作用核

定义卷积核$f : G \to \mathbb{C}$为：

$$f(g) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & g \equiv \pm 1 \pmod{2N}, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

该核描述最邻近相互作用。

# 卷积核的构造

## 相互作用核

定义卷积核$f : G \to \mathbb{C}$为：

$$f(g) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & g \equiv \pm 1 \pmod{2N}, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

该核描述最邻近相互作用。

## 卷积算子

定义卷积算子$T$：

# 卷积核的构造

## 相互作用核

定义卷积核$f: G \to \mathbb{C}$为：

$$f(g) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & g \equiv \pm 1 \pmod{2N}, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

该核描述最邻近相互作用。

## 卷积算子

定义卷积算子$T$：

$$(Th)(g) = \sum_{k \in G} f(g-k)h(k)$$

# 卷积核的构造

## 相互作用核

定义卷积核$f : G \to \mathbb{C}$为：

$$f(g) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & g \equiv \pm 1 \pmod{2N}, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

该核描述最邻近相互作用。

## 卷积算子

定义卷积算子$T$：

$$(Th)(g) = \sum_{k \in G} f(g-k)h(k)$$

由于$f$的特殊形式：

# 卷积核的构造

## 相互作用核

定义卷积核$f : G \to \mathbb{C}$为：

$$f(g) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & g \equiv \pm 1 \pmod{2N}, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

该核描述最邻近相互作用。

## 卷积算子

定义卷积算子$T$：

$$(Th)(g) = \sum_{k \in G} f(g-k)h(k)$$

由于$f$的特殊形式：

$$(Th)(g) = \frac{1}{2}[h(g-1) + h(g+1)]$$

# 傅里叶对角化

## 傅里叶变换计算

计算卷积核的傅里叶变换：

# 傅里叶对角化

## 傅里叶变换计算

计算卷积核的傅里叶变换：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g) = \frac{1}{2}(e^{2\pi ik/2N} + e^{-2\pi ik/2N}) = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

# 傅里叶对角化

## 傅里叶变换计算

计算卷积核的傅里叶变换：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g) = \frac{1}{2}(e^{2\pi ik/2N} + e^{-2\pi ik/2N}) = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

## 定理 (对角化定理)

每个特征标$\chi_k$是卷积算子$T$的特征函数：

# 傅里叶对角化

## 傅里叶变换计算

计算卷积核的傅里叶变换：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g) = \frac{1}{2}(e^{2\pi ik/2N} + e^{-2\pi ik/2N}) = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

## 定理 (对角化定理)

每个特征标$\chi_k$是卷积算子$T$的特征函数：

$$(T\chi_k)(g) = \hat{f}(k) \cdot \chi_k(g) = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)\chi_k(g)$$

# 傅里叶对角化

## 傅里叶变换计算

计算卷积核的傅里叶变换：

$$\hat{f}(k) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_k(g) = \frac{1}{2}(e^{2\pi ik/2N} + e^{-2\pi ik/2N}) = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

## 定理 (对角化定理)

每个特征标$\chi_k$是卷积算子$T$的特征函数：

$$(T\chi_k)(g) = \hat{f}(k) \cdot \chi_k(g) = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)\chi_k(g)$$

傅里叶变换完全对角化了卷积算子。

# 奇函数子空间

**对称性约束**

考虑循环群上的奇函数：

# 奇函数子空间

## 对称性约束

考虑循环群上的奇函数：

$$h(-g) = -h(g), \quad \forall g \in G$$

# 奇函数子空间

## 对称性约束

考虑循环群上的奇函数：

$$h(-g) = -h(g), \quad \forall g \in G$$

该约束自然实现狄利克雷边界条件。

# 奇函数子空间

## 对称性约束

考虑循环群上的奇函数：

$$h(-g) = -h(g), \quad \forall g \in G$$

该约束自然实现狄利克雷边界条件。

## 边界条件推导

- $h(0) = -h(0) \Rightarrow h(0) = 0$

# 奇函数子空间

## 对称性约束

考虑循环群上的奇函数：

$$h(-g) = -h(g), \quad \forall g \in G$$

该约束自然实现狄利克雷边界条件。

## 边界条件推导

- $h(0) = -h(0) \Rightarrow h(0) = 0$
- $h(N) = -h(-N) = -h(N) \Rightarrow h(N) = 0$

# 奇函数子空间

## 对称性约束

考虑循环群上的奇函数：

$$h(-g) = -h(g), \quad \forall g \in G$$

该约束自然实现狄利克雷边界条件。

## 边界条件推导

- $h(0) = -h(0) \Rightarrow h(0) = 0$
- $h(N) = -h(-N) = -h(N) \Rightarrow h(N) = 0$
- 重现端点处的零边界条件

# 奇函数子空间

## 对称性约束

考虑循环群上的奇函数：

$$h(-g) = -h(g), \quad \forall g \in G$$

该约束自然实现狄利克雷边界条件。

## 边界条件推导

- $h(0) = -h(0) \Rightarrow h(0) = 0$
- $h(N) = -h(-N) = -h(N) \Rightarrow h(N) = 0$
- 重现端点处的零边界条件

# 奇函数子空间

## 对称性约束

考虑循环群上的奇函数：

$$h(-g) = -h(g), \quad \forall g \in G$$

该约束自然实现狄利克雷边界条件。

## 边界条件推导

- $h(0) = -h(0) \Rightarrow h(0) = 0$
- $h(N) = -h(-N) = -h(N) \Rightarrow h(N) = 0$
- 重现端点处的零边界条件

## 维度分析

奇函数子空间的维度为$N - 1 = n$，与原始问题的维度完全吻合。

# 离散正弦特征函数

## 特征函数构造

在奇函数子空间中，特征函数为离散正弦函数：

# 离散正弦特征函数

## 特征函数构造

在奇函数子空间中，特征函数为离散正弦函数：

$$\phi_k(g) = \sin\left(\frac{\pi k g}{N}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

# 离散正弦特征函数

## 特征函数构造

在奇函数子空间中，特征函数为离散正弦函数：

$$\phi_k(g) = \sin\left(\frac{\pi k g}{N}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

## 特征值验证

直接计算验证：

# 离散正弦特征函数

## 特征函数构造

在奇函数子空间中，特征函数为离散正弦函数：

$$\phi_k(g) = \sin\left(\frac{\pi k g}{N}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

## 特征值验证

直接计算验证：

$$(T\phi_k)(g) = \frac{1}{2}[\phi_k(g-1) + \phi_k(g+1)] = \phi_k(g)\cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

# 离散正弦特征函数

## 特征函数构造

在奇函数子空间中，特征函数为离散正弦函数：

$$\phi_k(g) = \sin\left(\frac{\pi k g}{N}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$$

## 特征值验证

直接计算验证：

$$(T\phi_k)(g) = \frac{1}{2}[\phi_k(g-1) + \phi_k(g+1)] = \phi_k(g)\cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

因此$\phi_k$是特征函数，对应特征值$\cos(\pi k/N)$。

# 主要定理证明

**定理 (瑞利商最大值)**

经典瑞利商的最大值为$\cos(\pi/(n+1))$，对应三对角矩阵$M$的最大特征值。

# 主要定理证明

**定理 (瑞利商最大值)**

经典瑞利商的最大值为$\cos(\pi/(n+1))$，对应三对角矩阵$M$的最大特征值。

**证明.**

1. 卷积算子$T$在奇函数子空间中的限制即为矩阵$M$

□

# 主要定理证明

**定理 (瑞利商最大值)**

经典瑞利商的最大值为$\cos(\pi/(n+1))$，对应三对角矩阵$M$的最大特征值。

**证明.**

1. 卷积算子$T$在奇函数子空间中的限制即为矩阵$M$
2. $T$的特征值为$\cos(\pi k/N)$，$k = 1, \ldots, N-1$

□

# 主要定理证明

**定理 (瑞利商最大值)**

经典瑞利商的最大值为$\cos(\pi/(n+1))$，对应三对角矩阵$M$的最大特征值。

**证明.**

1. 卷积算子$T$在奇函数子空间中的限制即为矩阵$M$
2. $T$的特征值为$\cos(\pi k/N)$，$k = 1, \ldots, N-1$
3. 最大特征值为$\cos(\pi/N) = \cos(\pi/(n+1))$

□

# 主要定理证明

**定理 (瑞利商最大值)**

经典瑞利商的最大值为$\cos(\pi/(n+1))$，对应三对角矩阵$M$的最大特征值。

**证明.**

1. 卷积算子$T$在奇函数子空间中的限制即为矩阵$M$
2. $T$的特征值为$\cos(\pi k/N)$，$k=1,\ldots,N-1$
3. 最大特征值为$\cos(\pi/N)=\cos(\pi/(n+1))$
4. 由瑞利商变分原理，该值即为瑞利商的最大值

□

# 理论意义与优势

## 理论意义

- 揭示了瑞利商的对称性本质

# 理论意义与优势

## 理论意义

- 揭示了瑞利商的对称性本质
- 建立了离散分析与群表示论的联系

# 理论意义与优势

## 理论意义

- 揭示了瑞利商的对称性本质
- 建立了离散分析与群表示论的联系
- 提供了连续与离散理论的统一框架

# 理论意义与优势

## 理论意义

- 揭示了瑞利商的对称性本质
- 建立了离散分析与群表示论的联系
- 提供了连续与离散理论的统一框架
- 具有一定的启发性可推广到复杂系统

# 理论意义与优势

## 理论意义

- 揭示了瑞利商的对称性本质
- 建立了离散分析与群表示论的联系
- 提供了连续与离散理论的统一框架
- 具有一定的启发性可推广到复杂系统

# 理论意义与优势

## 理论意义

- 揭示了瑞利商的对称性本质
- 建立了离散分析与群表示论的联系
- 提供了连续与离散理论的统一框架
- 具有一定的启发性可推广到复杂系统

## 物理直观性

- 对称性约束对应物理边界条件

# 理论意义与优势

## 理论意义

- 揭示了瑞利商的对称性本质
- 建立了离散分析与群表示论的联系
- 提供了连续与离散理论的统一框架
- 具有一定的启发性可推广到复杂系统

## 物理直观性

- 对称性约束对应物理边界条件
- 卷积算子描述相互作用模式

# 理论意义与优势

## 理论意义

- 揭示了瑞利商的对称性本质
- 建立了离散分析与群表示论的联系
- 提供了连续与离散理论的统一框架
- 具有一定的启发性可推广到复杂系统

## 物理直观性

- 对称性约束对应物理边界条件
- 卷积算子描述相互作用模式
- 特征值对应系统的振动模式

# 对称性是理解数学的钥匙

# 对称性是理解数学的钥匙

有限群傅里叶分析为我们打开了
理解瑞利商极值性质的新大门

# 对称性是理解数学的钥匙

有限群傅里叶分析为我们打开了
理解瑞利商极值性质的新大门

# 非常感谢！
# 欢迎提问与讨论